软件分析

布尔可满足性

熊英飞
北京大学
2018

课程项目时间结点

- 代码提交（12月1日）
  - Readme.pdf：A4两页以内，描述算法的主要设计思想，小组成员姓名、学号和分工
  - Code目录：项目源代码
  - analyzer.jar: 编译好的jar文件
- 现场报告（12月5日）
  - 各组交流所采用的算法，每组报告8分钟左右，提问2分钟

路径敏感性

- 路径非敏感分析：不考虑程序中的路径可行性，忽略分支循环语句中的条件
- 路径敏感分析：考虑程序中的路径可行性，只分析可能的路径

路径敏感vs路径非敏感

```
int f(int x){
  if (x > 5)
    x = 10;
  return x;
}
```

假设输入的区间为(5, 10]

- 使用路径非敏感的区间分析，得到函数的返回值为
  - (5, 10]
- 使用路径敏感的区间分析，得到函数的返回值为
  - [10, 10]

给数据流分析添加基本路径敏感性

```
int f(int x){
  if (x > 5) {
    assert(x > 5);
    x = 10; }
   else {
     assert(x <= 5);
  }
  return x;
}
```

假设输入的区间为(5, 10]

- 给每条分支添加assert语句
- assert(x>5)转换函数
  - $f(x)=x \cap (5, +\infty)$
- assert(x>5)转换函数
  - $f(x)=x \cap (-\infty, 5]$

路径敏感的数据流分析

- 优点：
  - 完全兼容已有数据流分析框架
  - 利用已有技术直接支持循环、过程间等复杂分析
- 缺点：
  - 当前数据流分析内容必须与条件判断兼容
    - 给定条件x>5，如何做reaching definition分析？
    - 给定条件x>y，如何做路径敏感的区间分析？
  - 根据抽象域，对于某些情况无法判断
    - if (y > 0) x = 10; else x=1; if (x<6&&x>2) x=20;
    - x不会赋值成20，但是判断不出来
  - 无法分路径输出结果

路径敏感分析

- 符号执行、模型检查等
- 关键问题：如何知道哪些路径是可行的？
  - 约束求解技术

约束求解

- 给定一组约束，求
  - 这组约束是否可满足
  - （可选）如果可满足，给出一组赋值
  - （可选）如果不可满足，给出一个较小的矛盾集 unsatisfiable core
- 总的来说是不可判定的问题，但存在很多可判定的子问题
- 如
  - a > 10
  - b < 100 || b > 200
  - a+b=30
- 可满足：a=15, b=15

约束求解

- SAT solver：解著名的NP完全问题
- Linear solvers：求线性方程组
- Array solvers: 求解包含数组的约束
- String solver：求解字符串约束

- SMT：综合以上各类约束求解工具

历史

- 约束求解历史上一直有两个特点
  - 速度慢
  - 约束求解算法分散发展，各自只能解小部分约束
- 进入2000年以来
  - SAT的求解速度得到了突飞猛进的进步
    - 理论上还无法完全解释SAT的高速求解
  - 以SAT为核心，各种单独的约束求解算法被整合起来，形成了SMT

复习：SAT问题

- 最早被证明的NP完全问题之一（1971）

- 文字literal：变量x或者是x取反
  - 如$\neg x$
- 子句clause：文字的析取（disjunction）
  - 如$x \vee \neg y$
- 布尔赋值：从变量到布尔值上的映射
- SAT问题：子句集上的约束求解问题
  - 给定一组子句，寻找一个布尔赋值，使得所有子句为真

复习：合取范式
Conjunctive Normal Form

- 合取范式：子句的合取
  - 如$(x \vee \neg y) \wedge \neg x$
- SAT问题通常是通过合取范式定义的
- 任何命题逻辑公式可以表达为合取范式
- 即：SAT问题可以求解任何命题逻辑公式

SAT举例

- 每行为一个子句
- {1, -4}
- {-2, 3}
- {2, 4}
- {-2, -3, 4}
- {-1, -4}
- 该SAT问题是否可满足？
  - 不可满足
- 可满足条件：存在一组解，使得每个子句中至少有一个文字为真

SAT基本求解算法-穷举


```
Sat(assign) {
  if (assign是完整的)
    if(每个子句中都有至少一个文字为真)
      return true;
    else return false;
  else
    选择一个未赋值的变量x;
    return sat(assign ∪ {x=0}) || sat(assign ∪ {x=1})
}
```

优化1：冲突检测

- assign={1, 4} 红色为假，绿色为真
- {1, -4}
- {-2, 3}
- {2, 4}
- {-2, -3, 4}
- {-1, -4} //出现冲突
- 不需要完整赋值就能知道结果

优化1：基于冲突检测的SAT求解算法


```
Sat(assign) {
  if (assign有冲突) return false;
  if (assign是完整的) return true;
  选择一个未赋值的变量x;
  return sat(assign ∪ {x=0}) || sat(assign ∪ {x=1})
}
```

优化2：赋值推导

- assign={2} 红色为假，绿色为真
- {1, -4}
- {-2, 3}
- {2, 4}
- {-2, -3, 4}
- {-1, -4}

优化2：赋值推导

- assign={2} 红色为假，绿色为真
- {1, -4}
- {-2, 3} //推导
- {2, 4}
- {-2, -3, 4}
- {-1, -4}

优化2：赋值推导

- assign={2} 红色为假，绿色为真
- {1, -4}
- {-2, 3}
- {2, 4}
- {-2, -3, 4} //推导
- {-1, -4}

优化2：赋值推导

- assign={2} 红色为假，绿色为真
- {1, -4} //推导
- {-2, 3}
- {2, 4}
- {-2, -3, 4}
- {-1, -4}

优化2：赋值推导

- assign={2} 红色为假，绿色为真
- {1, -4}
- {-2, 3}
- {2, 4}
- {-2, -3, 4}
- {-1, -4} //矛盾

- 无需继续遍历赋值就能得出结果

标准推导方法

- Unit Propagation
  - 其他文字都为假，剩下的一个文字必定为真
  - {-1, 2, -3} => 3
- Unate Propagation
  - 当一个子句存在为真的文字时，可以从子句集合中删除
    - ~~{2, 4}~~
- Pure literal elimination
  - 当一个变量只有为真或者为假的形式的时候，可以把包含该变量的子句删除
    - ~~{-4, 6}~~
    - ~~{-4, -6}~~

优化2：基于赋值推导和冲突检测的SAT求解——DPLL


```
dpll(assign) {
  assign’=赋值推导(assign);
  if (assign’有冲突) return false;
  if (assign’是完整的) return true;
  选择一个未赋值的变量x;
  return dpll(assign’ ∪ {x=0}) || dpll(assign’ ∪ {x=1});
}
```

- 该算法被称为DPLL，由Davis, Putnam, Logermann Loveland在1962年代提出

高级推导方法

- Probing
  - 如果令x=0或者x=1都能推导出y=0，则推导出y=0
- Equivalence classes
  - 预先检查出等价的子句集合，然后删除其中一个
    - {1, 2, -3}
    - ~~{2, 1, -3}~~

优化3：变量选择

- 先选择哪个变量赋值可能对求解造成很大影响
  - {1, -2}
  - {1, 2}
  - {-1, -2}
  - {-1, 2}
  - {3, 4, 5, 6, 7, 8}
- 优先选择1或者2可以快速发现不可满足
- 优先选择3-8需要反复回溯多次

变量选择方法Branching Heuristics

- 基于子句集的
  - 优先选择最短子句里的变量
  - 优先选择最常出现的变量
  - 例：上页例子中可以直接选到1或者2
- 基于历史的
  - 优先选择之前导致过冲突的变量
  - 例：上页例子一次完整赋值后，会优先选择1或者2

优化4：冲突导向的子句学习
CDCL Conflict-Driven Clause Learning

- 由微软亚洲研究院的Lintao Zhang在普林斯顿读书时提出
- 2000年初期大幅提升SAT效率的重要因素之一
- 基本思想：在搜索过程中学习问题的性质，加入约束集合中

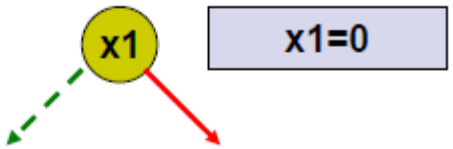
Lintao Zhang

Sharad Malik

一个DPLL的例子

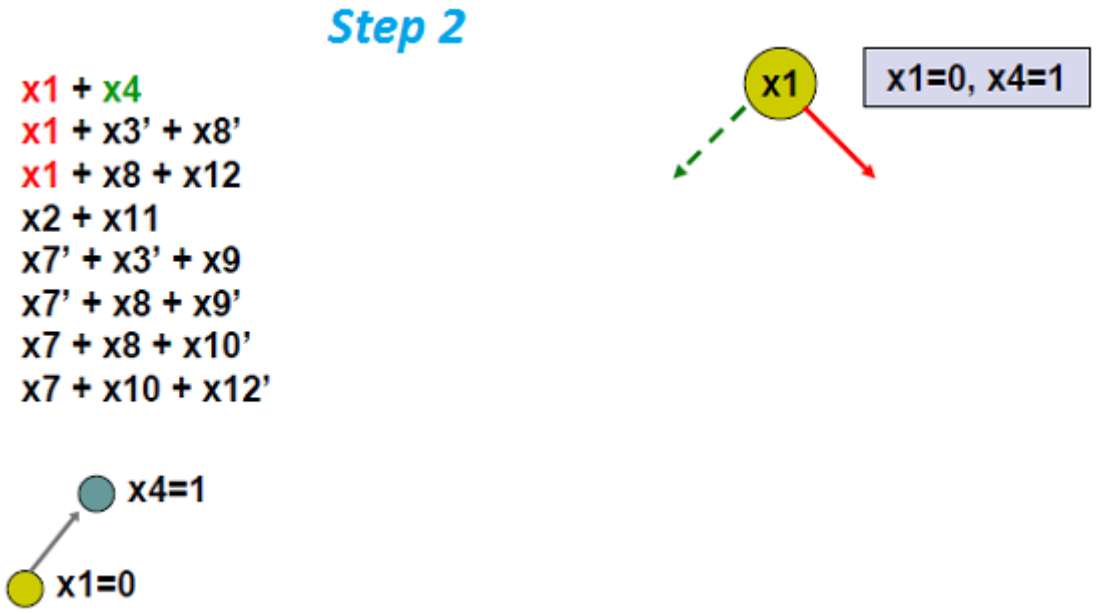
Step 1

x1 + x4
x1 + x3' + x8'
x1 + x8 + x12
x2 + x11
x7' + x3' + x9
x7' + x8 + x9'
x7 + x8 + x10'
x7 + x10 + x12'



x1=0

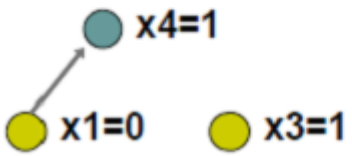
一个DPLL的例子

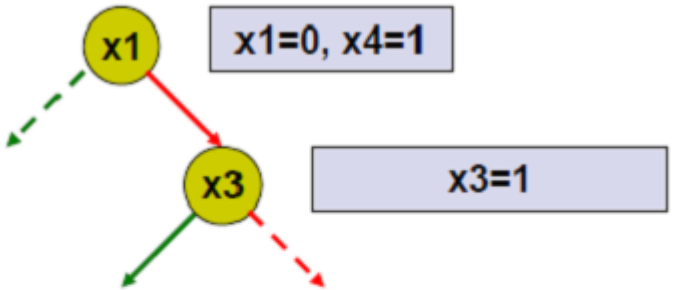

Step 2
x1 + x4
x1 + x3' + x8'
x1 + x8 + x12
x2 + x11
x7' + x3' + x9
x7' + x8 + x9'
x7 + x8 + x10'
x7 + x10 + x12'
x4=1
x1=0
x1
x1=0, x4=1

一个DPLL的例子

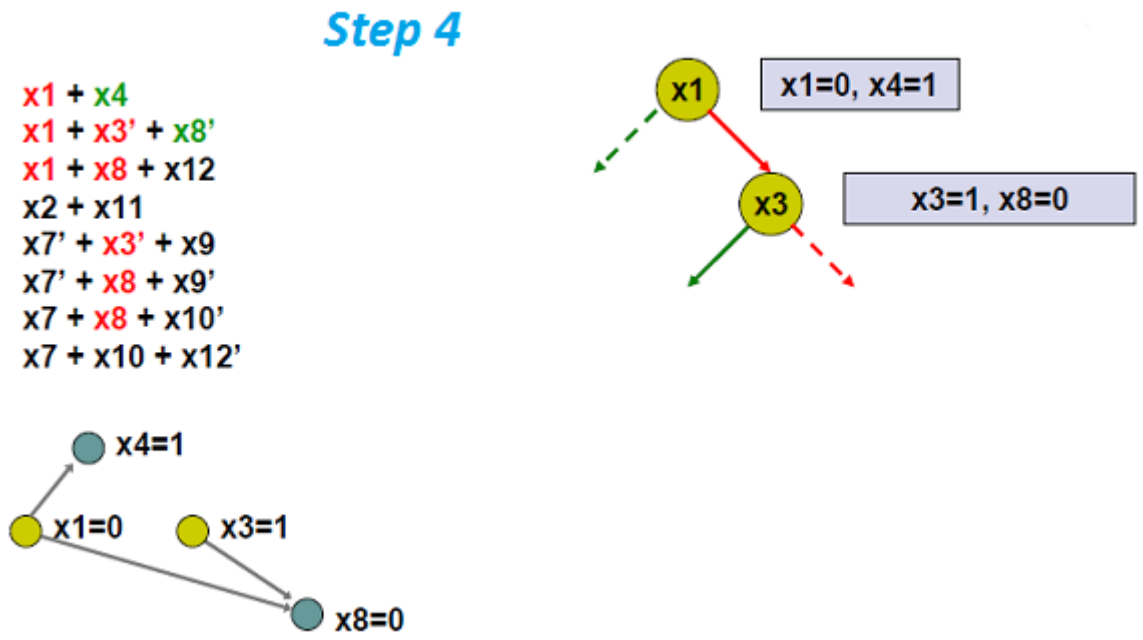
Step 3

x1 + x4
x1 + x3' + x8'
x1 + x8 + x12
x2 + x11
x7' + x3' + x9
x7' + x8 + x9'
x7 + x8 + x10'
x7 + x10 + x12'

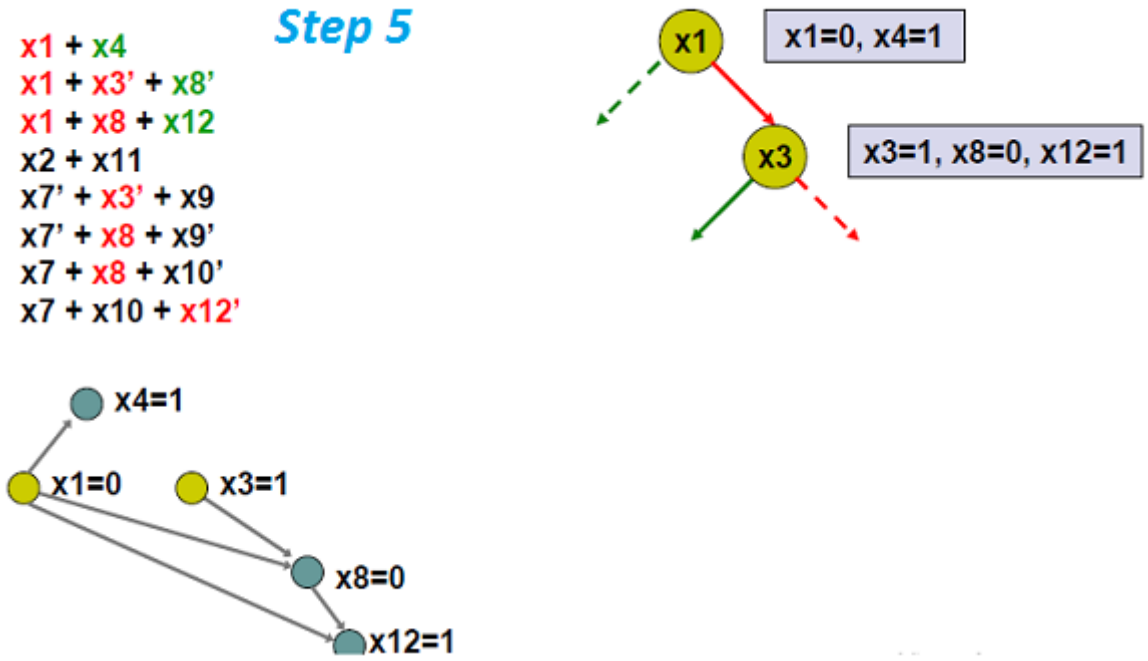




一个DPLL的例子


Step 4
x1 + x4
x1 + x3' + x8'
x1 + x8 + x12
x2 + x11
x7' + x3' + x9
x7' + x8 + x9'
x7 + x8 + x10'
x7 + x10 + x12'
x1
x1=0, x4=1
x3
x3=1, x8=0
x4=1
x1=0
x3=1
x8=0

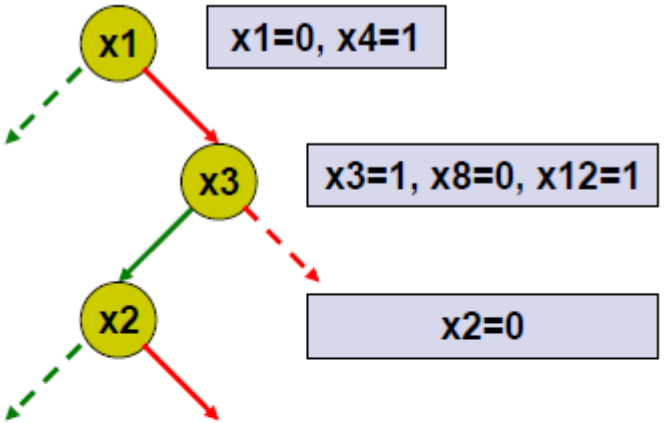
一个DPLL的例子

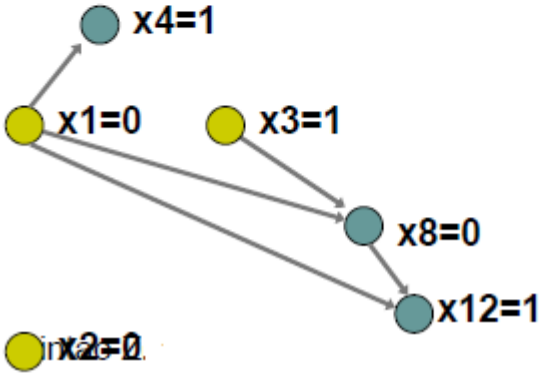

Step 5
x1 + x4
x1 + x3' + x8'
x1 + x8 + x12
x2 + x11
x7' + x3' + x9
x7' + x8 + x9'
x7 + x8 + x10'
x7 + x10 + x12'
x1
x1=0, x4=1
x3
x3=1, x8=0, x12=1
x4=1
x1=0
x3=1
x8=0
x12=1

一个DPLL的例子

Step 6

x1 + x4
x1 + x3' + x8'
x1 + x8 + x12
x2 + x11
x7' + x3' + x9
x7' + x8 + x9'
x7 + x8 + x10'
x7 + x10 + x12'

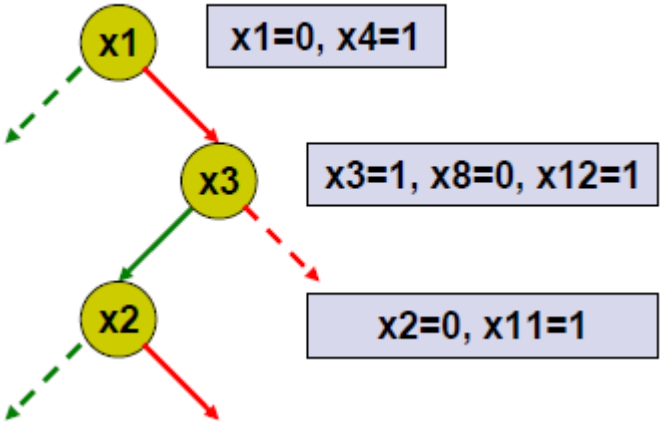


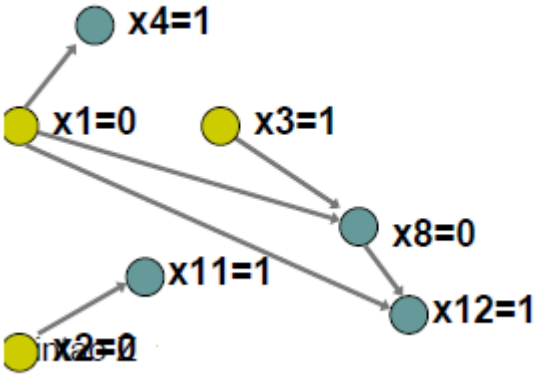


一个DPLL的例子

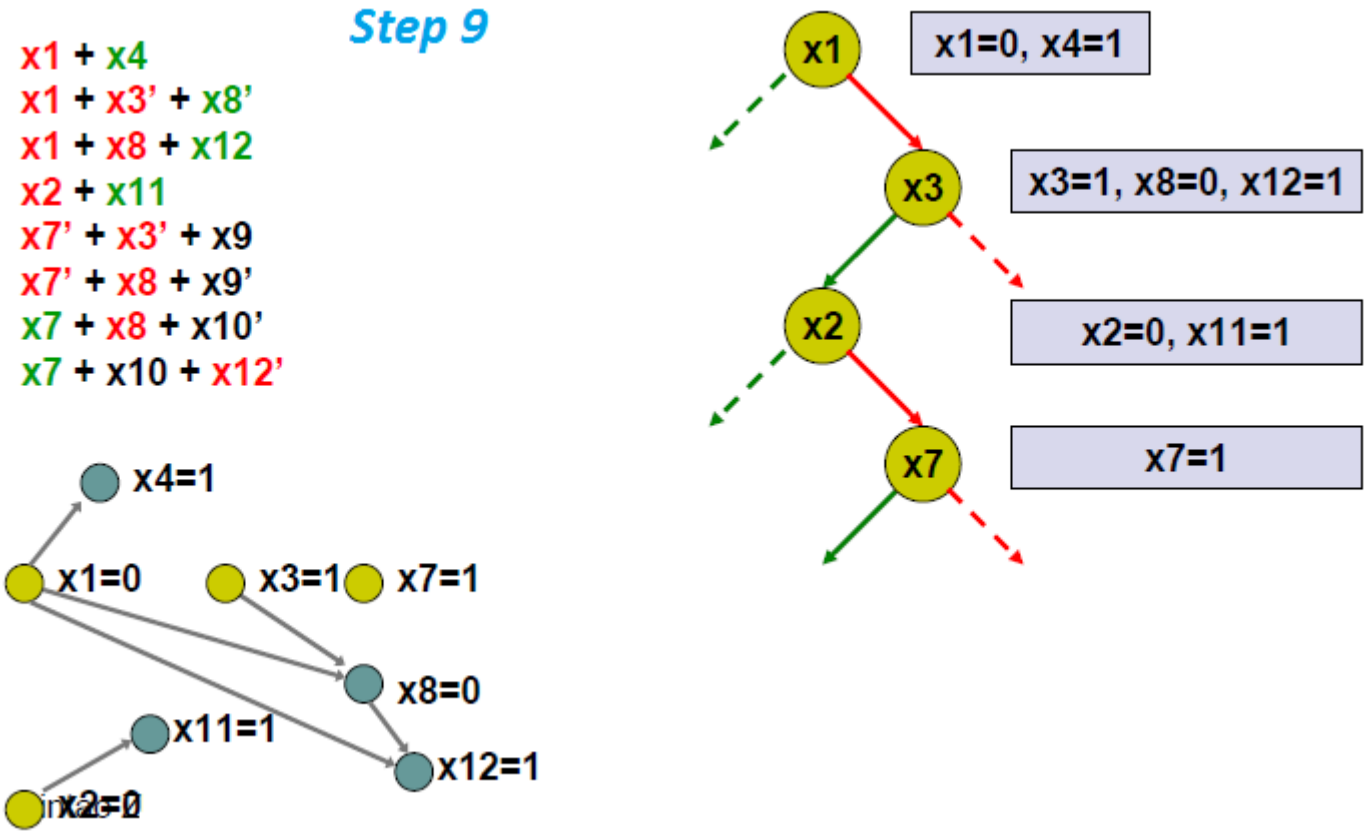
x1 + x4
x1 + x3' + x8'
x1 + x8 + x12
x2 + x11
x7' + x3' + x9
x7' + x8 + x9'
x7 + x8 + x10'
x7 + x10 + x12'

Step 7





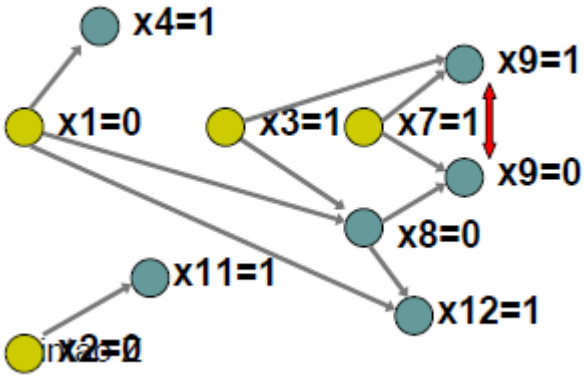
一个DPLL的例子

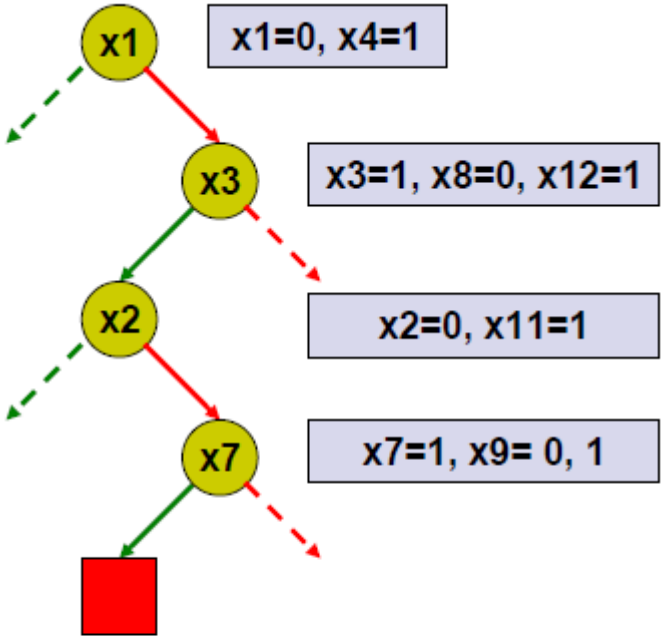

Step 9
x1 + x4
x1 + x3' + x8'
x1 + x8 + x12
x2 + x11
x7' + x3' + x9
x7' + x8 + x9'
x7 + x8 + x10'
x7 + x10 + x12'
x4=1
x1=0
x3=1
x7=1
x8=0
x11=1
x12=1
x1
x1=0, x4=1
x3
x3=1, x8=0, x12=1
x2
x2=0, x11=1
x7
x7=1

一个DPLL的例子

x1 + x4
x1 + x3' + x8'
x1 + x8 + x12
x2 + x11
x7' + x3' + x9
x7' + x8 + x9'
x7 + x8 + x10'
x7 + x10 + x12'

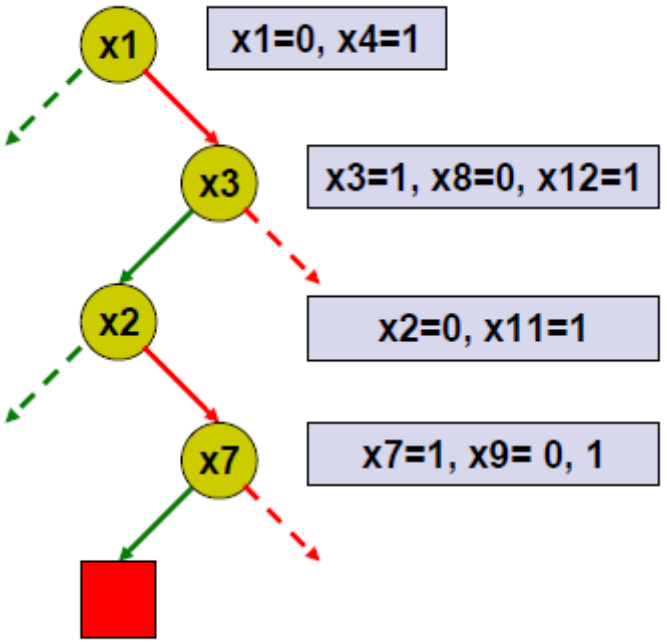
Step 10





DPLL的问题

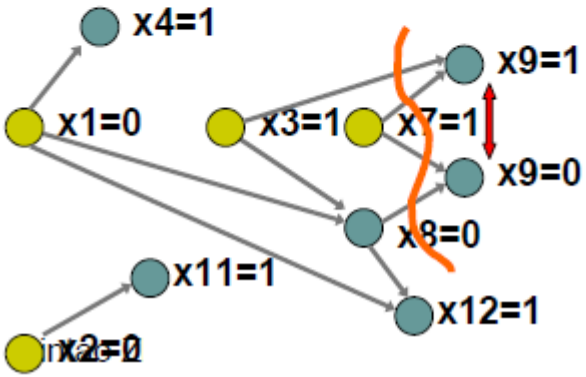
- 如果后续搜索把x7再次设置成了1，会重复出现该冲突

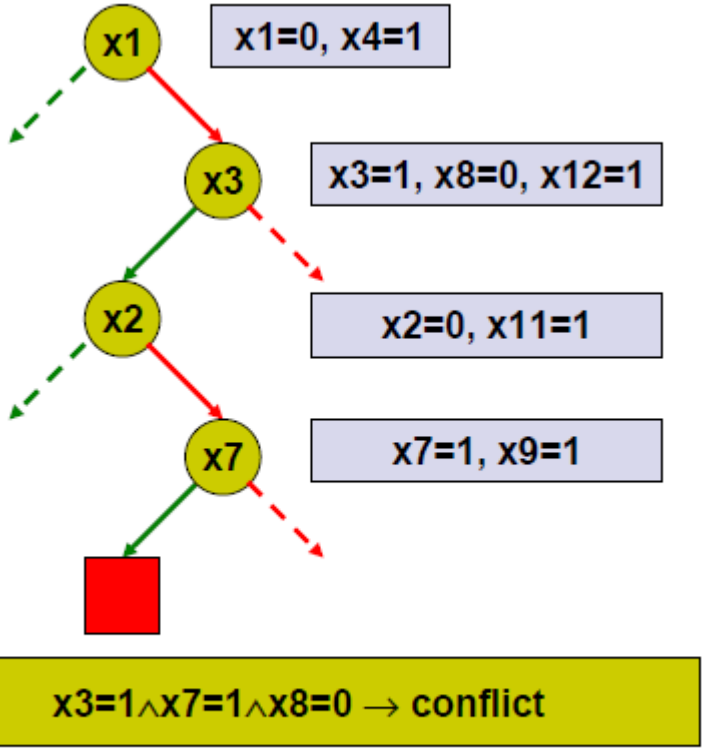


CDCL：子句学习

x1 + x4
x1 + x3' + x8'
x1 + x8 + x12
x2 + x11
x7' + x3' + x9
x7' + x8 + x9'
x7 + x8 + x10'
x7 + x10 + x12'

Step 11

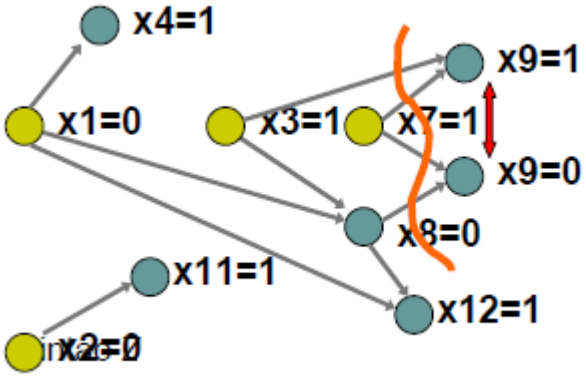


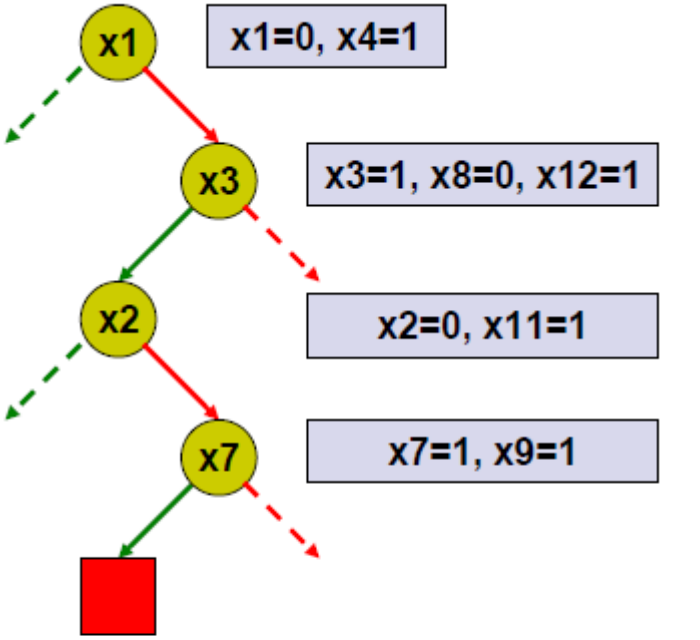


CDCL：子句学习

x1 + x4
x1 + x3' + x8'
x1 + x8 + x12
x2 + x11
x7' + x3' + x9
x7' + x8 + x9'
x7 + x8 + x10'
x7 + x10 + x12'

Step 13

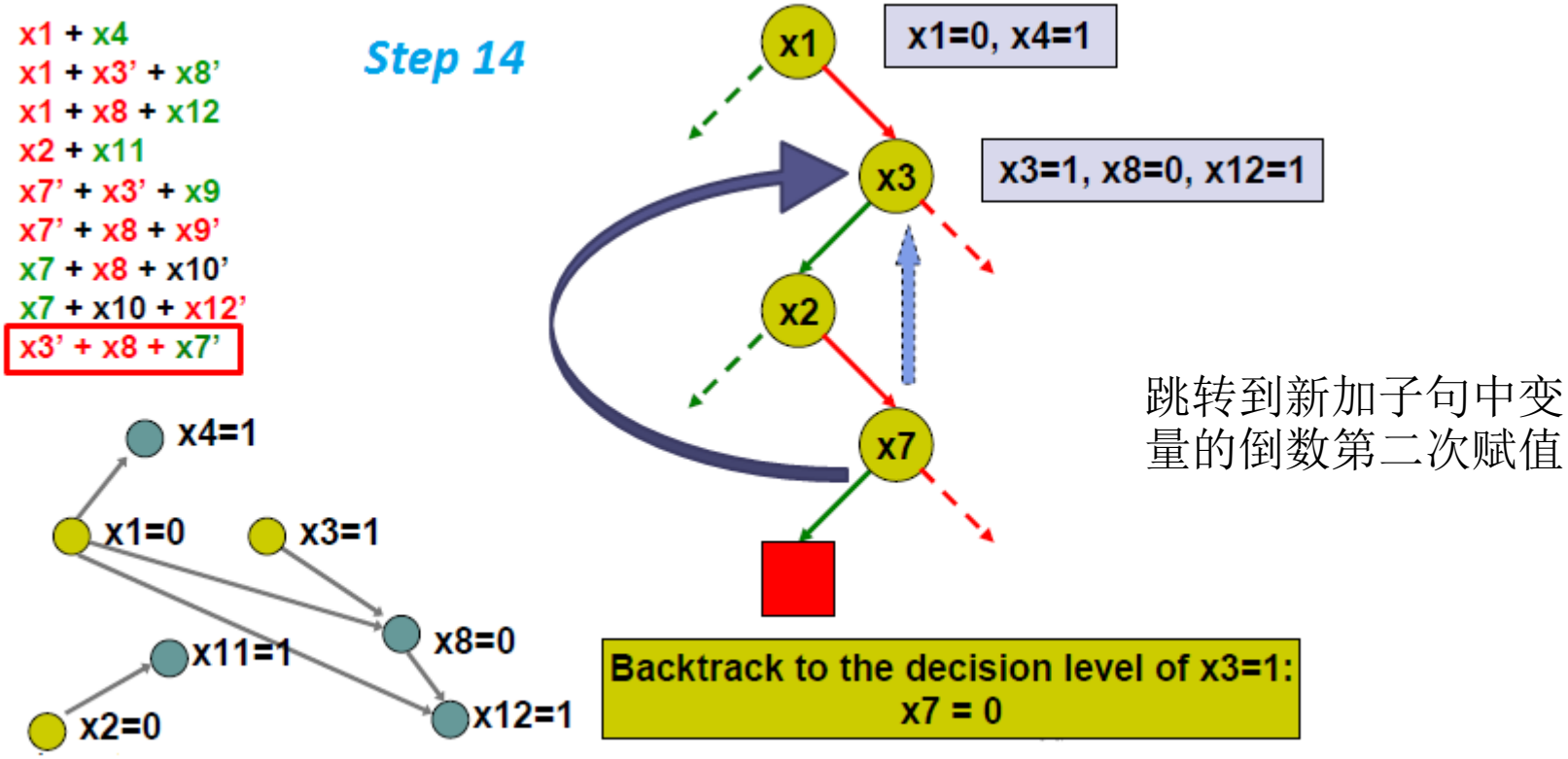




$x3=1 \wedge x7=1 \wedge x8=0 \rightarrow$ conflict

Add conflict clause: x3'+x7'+x8

CDCL：子句学习

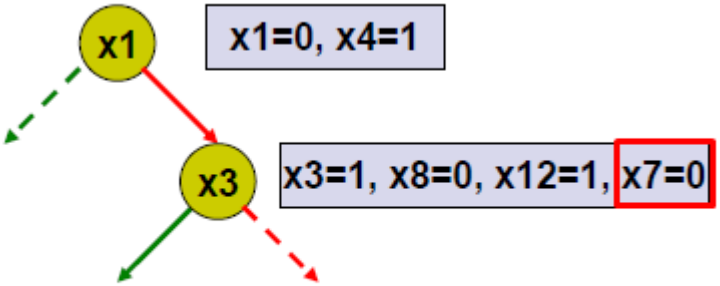


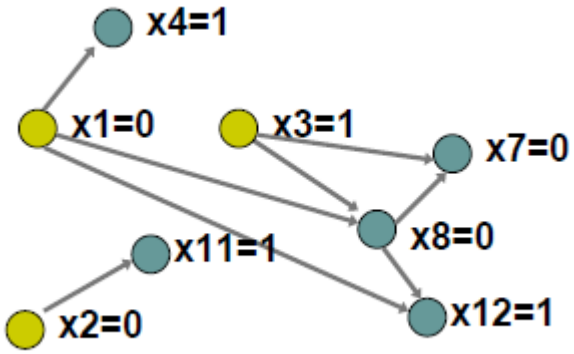
跳转到新加子句中变量的倒数第二次赋值

CDCL：子句学习

x1 + x4
x1 + x3' + x8'
x1 + x8 + x12
x2 + x11
x7' + x3' + x9
x7' + x8 + x9'
x7 + x8 + x10'
x7 + x10 + x12'
x3' + x8 + x7'

Step 15





CDCL：子句学习

- 注意从新添加约束出发的推导实际保证了之前探过的冲突赋值不会出现
- 所以不再需要记录之前遍历过的赋值，每次任意选择剩下的变量和赋值即可
  - 空赋值推出冲突意味着UNSAT

优化4：冲突导向的子句学习
CDCL Conflict-Driven Clause Learning


```
cdcl() {
  assign=空赋值;
  while (true) {
    赋值推导(assign);
    if (推导结果有冲突) {
      if (assign为空) return false;
      添加新约束;
      撤销赋值;
    } else {
      if (推导结果是完整的) return true;
      选择一个未尝试的赋值x=1或者x=0;
      添加该赋值到assign;
 }}}
```

优化4.1：新的变量选择方法VSIDS

- VSIDS=Variable State Independent Decaying Sum
- 首先按变量出现次数给所有变量打分
- 添加新子句的时候给子句中的变量加分
- 每隔一段时间把所有变量的分数除以一个常量

参考资料

- Decision Procedures: An Algorithmic Point of View
  - Daniel Kroening and Ofer Strichman
  - Springer, 2008