



软件分析

数据流分析：性质和扩展

熊英飞

北京大学



复习：数据流分析

- 数据流分析中采用了哪两种近似方案？
- 近似方案1：忽略掉程序的条件判断，认为所有分支都有可能到达
- 近似方案2：不在路径末尾做合并，在控制流汇合的所有位置提前做合并



复习：半格

- 已知半格 (S, \sqcap_S) 和半格 (T, \sqcap_T) 的高度分别是 x 和 y ，求半格 $(S \times T, \sqcap_{ST})$ 的高度
 - $(s_1, t_1) \sqcap_{ST} (s_2, t_2) = (s_1 \sqcap_S s_2, t_1 \sqcap_T t_2)$
- 答案： $x+y-1$



复习：单调函数

- 以下函数是否是单调递增/递减的：
 - $f(x) = x - 1$
 - 处处可导，且导数各处不为0的函数
 - 求集合 x 的补集
 - $f(x) = g \circ h(x)$ ，已知 g 和 h 是单调的
 - $f(x, y) = (g(x), h(y))$ ，已知 g 和 h 是单调的
 - $f(x, y) = x \sqcap y$ ，已知 $x \in S, y \in S, (S, \sqcap)$ 是和偏序关系对应的半格



数据流分析单调框架

- 一个控制流图 (V, E)
- 一个有限高度的半格 (S, \sqcap)
- 一个entry的初值 I
- 一组结点转换函数，对任意 $v \in V - \text{entry}$ 存在一个结点转换函数 f_v
- 注意：对于逆向分析，变换控制流图方向再应用单调框架即可



数据流分析实现算法

```
DATAentry = I
 $\forall v \in (V - \text{entry}): \text{DATA}_v \leftarrow \top$ 
ToVisit  $\leftarrow V - \text{entry}$ 
While(ToVisit.size > 0) {
  v  $\leftarrow$  ToVisit中任意结点
  ToVisit -= v
  MEETv  $\leftarrow \prod_{w \in \text{pred}(v)} \text{DATA}_w$ 
  If( $\text{DATA}_v \neq f_v(\text{MEET}_v)$ ) ToVisit  $\cup = \text{succ}(v)$ 
  DATAv  $\leftarrow f_v(\text{MEET}_v)$ 
}
```



数据流分析小结

- 应用单调框架设计一个数据流分析包含如下内容
 - 设计每个结点附加值的定义域
 - 设计交汇函数
 - 设计从语句导出结点变换函数的方法
 - 入口结点的初值
- 需要证明如下内容
 - 在单条路径上，变换函数保证安全性
 - 交汇函数对多条路径的合并方式保证安全性
 - 交汇函数形成一个半格
 - 半格的高度有限
 - 通常通过结点附加值的定义域为有限集合证明
 - 变换函数均为单调函数
 - 通常定义为 $f(D) = (D - KILL) \cup GEN$ 的形式



练习：可达定值(Reaching Definition)分析

- 对程序中任意语句，分析运行该语句后每个变量的值可能是由哪些语句赋值的，给出语句标号
 - 假设程序中没有指针、引用、复合结构
 - 要求上近似
 - 例：
 1. `a=100;`
 2. `if (...)`
 3. `a = 200;`
 4. `b = a;`
 5. `return a;`
 - 运行到2的时候a的定值是1
 - 运行到3的时候a的定值是3
 - 运行到4的时候a的定值是3， b的定值是4
 - 运行到5的时候a的定值是1, 3, b的定值是4



答案：可达定值(Reaching Definition)分析

- 正向分析
- 半格元素：一个集合的序列，每个序列位置代表一个变量，每个位置的集合代表该变量的定值语句序号
- 交汇操作：对应位置的并
- 变换函数：
 - 对于赋值语句 $v=...$
 - $KILL=\{\text{所有赋值给}v\text{的语句编号}\}$
 - $GEN=\{\text{当前语句编号}\}$
 - 对于其他语句
 - $KILL=GEN=\{\}$



上周作业：可用表达式 (available expression) 分析

- 给定程序中某个位置 p ，如果从入口到 p 的所有路径都对表达式 exp 求值，并且最后一次求值后该表达式的所有变量都没有被修改，则 exp 称作 p 的一个可用表达式。给出分析寻找可用表达式。
 - 假设程序中没有指针、数据、引用、复合结构
 - 要求下近似
 - 例：
 1. $a=c+(b+10);$
 2. $if (...)$
 3. $c = a+10;$
 4. $return a;$
 - 1运行结束的时候可用表达式是 $b+10$ 、 $c+(b+10)$
 - 2运行结束的时候可用表达式是 $b+10$ 、 $c+(b+10)$
 - 3运行结束的时候可用表达式是 $b+10$ 、 $a+10$
 - 4运行结束的时候可用表达式是 $b+10$



集合的最大下界

- 下界：给定集合 S ，如果满足 $\forall s \in S: u \sqsubseteq s$ ，则称 u 是 S 的一个下界
- 最大下界：设 u 是集合 S 的下界，给定任意下界 u' ，如果满足 $u' \sqsubseteq u$ ，则称 u 是 S 的最大下界，记为 τ_S
- 引理： $\bigcap_{s \in S} s$ 是 S 的最大下界
 - 证明：
 - 根据幂等性、交换性和结合性，我们有 $\forall v \in S: (\bigcap_{s \in S} s) \sqcap v = \bigcap_{s \in S} s$ ，所以 $\bigcap_{s \in S} s$ 是 S 的下界
 - 给定另一个下界 u ，我们有 $\forall s \in S: s \sqcap u = u$ ， $(\bigcap_{s \in S} s) \sqcap u = (\bigcap_{s \in S} (s \sqcap u)) = u$ ，所以 $\bigcap_{s \in S} s$ 是最大下界
- 推论：半格的任意子集都有最大下界



数据流分析的安全性-定义

- 安全性：对控制流图上任意结点 v_i 和从entry到 v_i 的所有可行路径集合 P ，满足 $DATA_{v_i} \sqsubseteq \bigcap_{v_1 v_2 v_3 \dots v_i \in P} f_{v_i} \circ f_{v_{i-1}} \circ \dots \circ f_{v_1}(I_{entry})$
 - 示例：符号分析的偏序关系中 \perp 比较小， \top 比较大，结果是上近似
 - 示例：活跃变量分析的偏序关系为超集关系，所以数据流分析产生相等或者较大集合，是上近似



数据流分析的安全性-证明

- 给定任意路径的 $v_1 v_2 v_3 \dots v_i$, DATA_{v_i} 的计算相当于在每两个相邻转换函数 $f_{v_i} \circ f_{v_{i-1}}$ 之间加入了 MEET 交汇计算, 根据幂等性, 任意交汇计算的结果一定在偏序上小于等于原始结果。再根据转换函数的单调性, DATA_{v_i} 的值一定小于等于 $f_{v_i} \circ f_{v_{i-1}} \circ \dots \circ f_{v_1}(I_{\text{entry}})$ 。由于原路径的任意性, DATA_{v_i} 是一个下界。
- 再根据前面的引理, $\bigcap_{v_1 v_2 v_3 \dots v_i \in P} f_{v_i} \circ f_{v_{i-1}} \circ \dots \circ f_{v_1}(I_{\text{entry}})$ 是最大下界, 所以原命题成立。



数据流分析的分配性

- 一个数据流分析满足分配性，如果
 - $\forall v \in V, x, y \in S: f_v(x) \sqcap f_v(y) = f_v(x \sqcap y)$
- 例：符号分析中的结点转换函数不满足分配性
 - 为什么？
 - 令 f_v 等于“乘以零”， $f_v(\text{正}) \sqcap f_v(\text{负})$
- 例：在集合和交/并操作构成的半格中，给定任意两个集合 GEN, KILL，函数 $f(\text{DATA}) = (\text{DATA} - \text{KILL}) \cup \text{GEN}$ 满足分配性
 - $f(x) \cup f(y) = (x - D) \cup G \cup (y - D) \cup G = (x - D) \cup (y - D) \cup G = (x \cup y - D) \cup G = f(x \cup y)$
 - $f(x) \cap f(y) = ((x - D) \cup G) \cap ((y - D) \cup G) = ((x - D) \cap (y - D)) \cup G = (x \cap y - D) \cup G = f(x \cap y)$



数据流分析的分配性

- 一个数据流分析满足分配性，如果
 - $\forall v \in V, x, y \in S: f_v(x) \sqcap f_v(y) = f_v(x \sqcap y)$
- 令 P' 为所有控制流图上的路径，含不可行路径。
当数据流分析满足分配性的时候， $DATA_{v_i} = \sqcap_{v_1 v_2 v_3 \dots v_i \in P'} f_{v_i} \circ f_{v_{i-1}} \circ \dots \circ f_{v_1}(I_{entry})$
 - 也就是说，此时近似方案2不是近似，而是等价变换
 - 但是，数据流分析本身还可能是近似
 - 近似方案1是近似
 - 结点转换函数有可能是近似



数据流分析收敛性

- 不动点：给定一个函数 $f: S \rightarrow S$ ，如果 $f(x) = x$ ，则称 x 是 f 的一个不动点
- 不动点定理：给定高度有限的半格 (S, \sqsubseteq) 和一个单调函数 f ，链 $T_s, f(T_s), f(f(T_s)), \dots$ 必定在有限步之内收敛于 f 的最大不动点，即存在非负整数 n ，使得 $f^n(T_s)$ 是 f 的最大不动点。
 - 证明：
 - 收敛于 f 的不动点
 - $f(T_s) \sqsubseteq T_s$ ，两边应用 f ，得 $f(f(T_s)) \sqsubseteq f(T_s)$ ，
 - 应用 f ，可得 $f(f(f(T_s))) \sqsubseteq f(f(T_s))$
 - 因此，原链是一个递减链。因为该格高度有限，所以必然存在某个位置前后元素相等，即，到达不动点。
 - 收敛于最大不动点
 - 假设有另一不动点 u ，则 $u \sqsubseteq T_s$ ，两边反复应用 f 可证



数据流分析收敛性

- 给定固定的结点选择策略，原算法可以看做是反复应用一个函数
 - $(DATA_{v_1}, DATA_{v_2}, \dots, DATA_{v_n}) := F(DATA_{v_1}, DATA_{v_2}, \dots, DATA_{v_n})$
 - 为什么没有 $DATA_{entry}$
 - F是单调的吗?
- 根据不动点定理，原算法在有限步内终止，并且收敛于最大不动点

练习：区间 (Interval) 分析



- 求结果的上界和下界
 - 要求上近似
 - 假设程序中的运算只含有加减运算
 - 例：
 1. `a=0;`
 2. `for(int i=0; i<b; i++)`
 3. `a=a+1;`
 4. `return a;`
 - 结果为 $a:[0, +\infty]$



区间 (Interval) 分析

- 正向分析
- 半格元素：程序中每个变量的区间
- 交汇操作：区间的并
 - $[a, b] \cap [c, d] = [\min(a, c), \max(b, d)]$
- 变换函数：
 - 在区间上执行对应的加减操作
 - $[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$
 - $[a, b] - [c, d] = [a - d, b - c]$
- 不满足单调框架条件：半格不是有限的
 - 分析可能会不终止



区间分析改进

- 程序中的数字都是有上下界的，假设超过上下界会导致程序崩溃
 - $[a, b] + [c, d] = \begin{cases} \emptyset & a + c > int_max \\ (a + c, \min(b + d, int_max)) & a + c \leq int_max \end{cases}$
- 原分析终止，但需要`int_max`步才能收敛



Widening & Narrowing



Widening

- 区间分析需要很多步才能达到收敛
 - 格的高度太高
- Widening: 通过降低结果的精度来加快收敛速度
 - 基础Widening: 降低格的高度
 - 一般Widening: 根据变化趋势快速猜测一个结果



基础Widening

- 定义单调函数 w 把结果进一步抽象
 - 原始转换函数 f
 - 新转换函数 $w \circ f$

- 定义有限集合 $B = \{-\infty, 10, 20, 50, 100, +\infty\}$

- 定义映射函数

$$w([l, h]) = [\max\{i \in B \mid i \leq l\}, \min\{i \in B \mid h \leq i\}]$$

- 如:

- $w([15, 75]) = [10, 100]$



基础Widening的例子

- 令基础widening的有限集合为 $\{-\infty, 0, 1, 7, +\infty\}$

```
y = 0; x = 7; x = x+1;
while (input) {
    x = 7;
    x = x+1;
    y = y+1;
}
```

- while(input)处的结果变化

$[x \mapsto \top, y \mapsto \top]$
 $[x \mapsto [8,8], y \mapsto [0,0]]$
 $[x \mapsto [8,8], y \mapsto [0,1]]$
 $[x \mapsto [8,8], y \mapsto [0,2]]$
 $[x \mapsto [8,8], y \mapsto [0,3]]$

...

不使用Widening,
收敛慢或不收敛

$[x \mapsto \top, y \mapsto \top]$
 $[x \mapsto [7, \infty], y \mapsto [0,0]]$
 $[x \mapsto [7, \infty], y \mapsto [0,1]]$
 $[x \mapsto [7, \infty], y \mapsto [0,7]]$
 $[x \mapsto [7, \infty], y \mapsto [0, \infty]]$

使用基础Widening
收敛快, 但不精确



基础Widening的安全性

- 如果 $w(x) \sqsubseteq x$ ，则分析结果保证安全
- 安全性讨论
 - 新转换结果小于等于原结果，意味着 $DATA_V$ 的结果小于等于原始结果



基础Widening的收敛性

- 如果 w 是单调函数，则基础Widening收敛
 - 因为 $w \circ f$ 仍然是单调函数



一般Widening

- 更一般的widening同时参考更新前和更新后的值来猜测最终会收敛的值
 - 原数据流分析算法更新语句：
 - $DATA_v \leftarrow f_v(MEET_v)$
 - 引入widening算子 ∇ :
 - $DATA_v \leftarrow DATA_v \nabla f_v(MEET_v)$
- 用更一般的widening可以实现更快速的收敛，如
 - $[a, b] \nabla \top = [a, b]$
 - $\top \nabla [c, d] = [c, d]$
 - $[a, b] \nabla [c, d] = [x, y]$ where
 - $x = \begin{cases} a & c \geq a \\ -\infty & c < a \end{cases}$
 - $y = \begin{cases} b & d \leq b \\ +\infty & d > b \end{cases}$



一般Widening的例子

- 令基础widening的有限集合为 $\{-\infty, 0, 1, 7, +\infty\}$

```

y = 0; x = 7; x = x+1;
while (input) {
    x = 7;
    x = x+1;
    y = y+1;
}

```

- while(input)处的结果变化

$[x \mapsto \top, y \mapsto \top]$
 $[x \mapsto [8,8], y \mapsto [0,0]]$
 $[x \mapsto [8,8], y \mapsto [0,1]]$
 $[x \mapsto [8,8], y \mapsto [0,2]]$
 $[x \mapsto [8,8], y \mapsto [0,3]]$

...

不使用Widening,
收敛慢或不收敛

$[x \mapsto \top, y \mapsto \top]$
 $[x \mapsto [7, \infty], y \mapsto [0,0]]$
 $[x \mapsto [7, \infty], y \mapsto [0,1]]$
 $[x \mapsto [7, \infty], y \mapsto [0,7]]$
 $[x \mapsto [7, \infty], y \mapsto [0, \infty]]$

使用基础Widening
收敛快，但不精确

$[x \mapsto \top, y \mapsto \top]$
 $[x \mapsto [8,8], y \mapsto [0,0]]$
 $[x \mapsto [8,8], y \mapsto [0, \infty]]$

使用一般Widening
收敛更快，
结果(恰好)精确

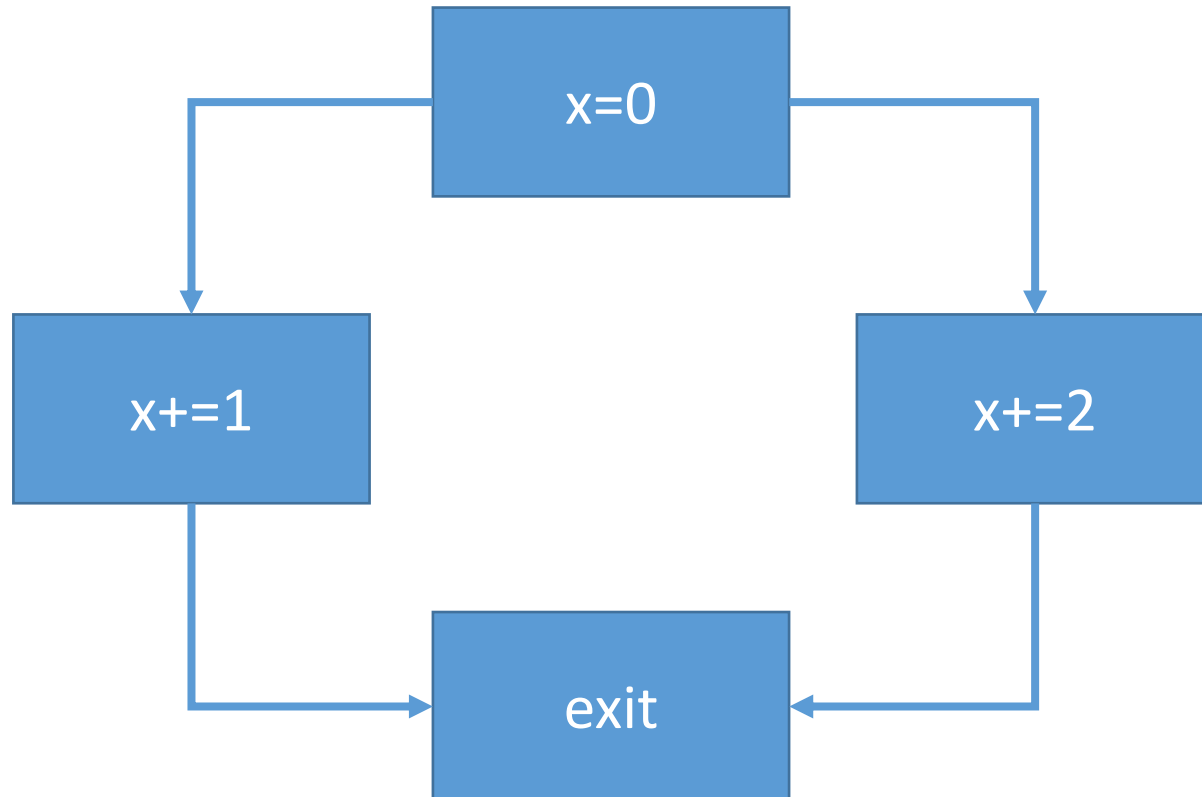


一般Widening的性质

- 如果 $x \nabla y \sqsubseteq y \wedge x \nabla y \sqsubseteq x$ ，则一般Widening的分析结果保证安全性
- 目前没有找到容易判断的属性来证明一般Widening的收敛性
 - Widening算子本身通常不保证变换函数单调递增
 - $[1,1] \nabla [1,2] = [1, \infty]$
 - $[1,2] \nabla [1,2] = [1,2]$
- 能否给出一个区间分析上不收敛的例子？

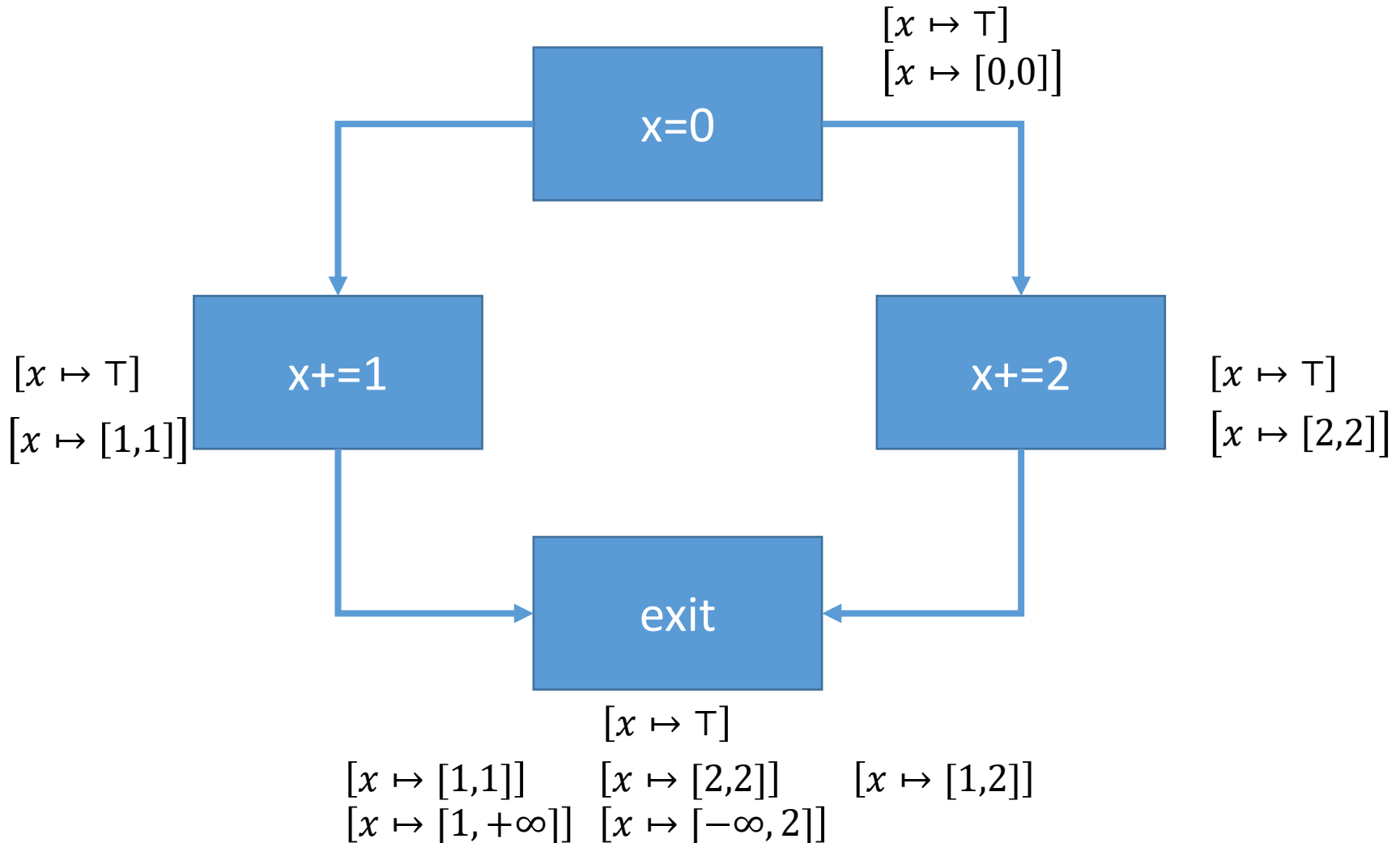


Widening不收敛的例子





Widening不收敛的例子

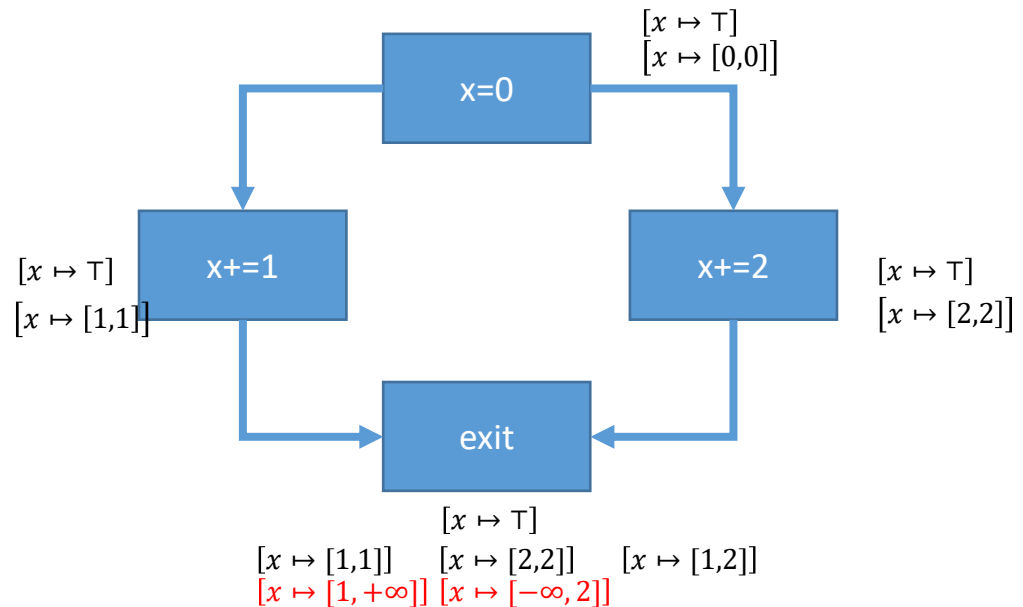




如何拯救Widening带来的不精确?

```
y = 0; x = 7; x = x+1;
while (input) {
  x = 7;
  x = x+1;
  y = y+1;
}
```

- $[x \mapsto \top, y \mapsto \top]$
- $[x \mapsto [7, \infty], y \mapsto [0,0]]$
- $[x \mapsto [7, \infty], y \mapsto [0,1]]$
- $[x \mapsto [7, \infty], y \mapsto [0,7]]$
- $[x \mapsto [7, \infty], y \mapsto [0, \infty]]$





Narrowing

- 通过再次应用原始转换函数对Widening的结果进行修正

| | |
|-------------------------------------|---------------------------------------|
| <code>y = 0; x = 7; x = x+1;</code> | <code>[x ↦ ⊤, y ↦ ⊤]</code> |
| <code>while (input) {</code> | <code>[x ↦ [7, ∞], y ↦ [0,0]]</code> |
| <code>x = 7;</code> | <code>[x ↦ [7, ∞], y ↦ [0,1]]</code> |
| <code>x = x+1;</code> | <code>[x ↦ [7, ∞], y ↦ [0,7]]</code> |
| <code>y = y+1;</code> | <code>[x ↦ [7, ∞], y ↦ [0, ∞]]</code> |
| <code>}</code> | <code>[x ↦ [8,8], y ↦ [0, ∞]]</code> |



Narrowing的安全性

- 分析数据流分析收敛性时，整体数据流分析可以看做一个函数F
- 令
 - 原数据流分析的函数为F，收敛于 I_F
 - 经过Widening的函数为G，收敛于 I_G
- 那么有
 - 因为 $I_F \supseteq I_G$
 - 所以 $I_F = F(I_F) \supseteq F(I_G) \supseteq G(I_G) = I_G$
 - 即 $I_F \supseteq F(I_G) \supseteq I_G$
- 类似可得
 - $I_F \supseteq F^k(I_G) \supseteq I_G$
- 即Narrowing保证安全性



Narrowing的收敛性

- Narrowing不保证收敛
- 收敛的情况下也不保证快速收敛
 - 例子需要用到关系型抽象域

- 解决方案：应用widening技术到narrowing过程中



Narrowing算子

- 引入narrowing算子 Δ :

$$\text{DATA}_V \leftarrow \text{DATA}_V \Delta f_V(\text{MEET}_V)$$

- 如

- $[a, b] \Delta [c, d] = [x, y]$, where

- $x = \begin{cases} a & a \neq -\infty \\ c & a = -\infty \end{cases}$

- $y = \begin{cases} b & b \neq +\infty \\ d & b = +\infty \end{cases}$

- 即：已经收敛到的整数不改动，只重新计算被widening扩展到的无穷大



Narrowing算子的性质

- 同widening的情形类似:
- 如果 $x\Delta y \sqsubseteq y$, 则narrowing保证安全
- 目前没有找到容易判断的属性来证明Narrowing的收敛性



参考资料

- 《编译原理》 第9章
- Lecture Notes on Static Analysis
 - <https://cs.au.dk/~amoeller/spa/>
- A Gentle Introduction to Abstract Interpretation
 - Patrick Cousot
 - TASE 2015 Keynote speech
- 抽象解释及其在静态分析中的应用
 - 陈立前
 - SWU-RISE Computer Science Tutorial