软件理论基础与实践 习题课

直觉主义逻辑

2022年4月31日（星期四）

布劳威尔：数学是心灵的直觉。

直觉主义逻辑

构造逻辑。逻辑判断为真当且仅当创造主体可以核实它。

直觉主义逻辑**不接受排中律**（$P \lor \neg P$）。

- 我们无法在 Coq 中证明排中律。

```
Goal: P \/ ~P
----------------
Proof.
  left. / right.
Admitted.
```

哪些公式是经典逻辑中的定理而不是直觉主义逻辑中的定理?

回顾：自然推理系统（N系统）

- $(\in)$ $\Gamma; \alpha \vdash \alpha$
- $(\neg-)$ 若 $\Gamma; \neg\alpha \vdash \beta$ 且 $\Gamma; \neg\alpha \vdash \neg\beta$，则 $\Gamma \vdash \alpha$
- $(\rightarrow -)$ 若 $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ 且 $\Gamma \vdash \alpha$，则 $\Gamma \vdash \beta$
- $(\rightarrow +)$ 若 $\Gamma; \alpha \vdash \beta$，则 $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$
- $(\vee-)$ 若 $\Gamma; \alpha \vdash \gamma$ 且 $\Gamma; \beta \vdash \gamma$，则 $\Gamma; (\alpha \vee \beta) \vdash \gamma$
- $(\vee+)$ 若 $\Gamma \vdash \alpha$，则 $\Gamma \vdash (\alpha \vee \beta)$ 且 $\Gamma \vdash (\beta \vee \alpha)$
- $(\wedge-)$ 若 $\Gamma \vdash (\alpha \wedge \beta)$，则 $\Gamma \vdash \alpha$ 且 $\Gamma \vdash \beta$
- $(\wedge+)$ 若 $\Gamma \vdash \alpha$ 且 $\Gamma \vdash \beta$，则 $\Gamma \vdash (\alpha \wedge \beta)$

回顾：自然推理系统（系统N）

推演规则（反证法）：

$(\neg-)$ 若 $\Gamma; \neg\alpha \vdash \beta$ 且 $\Gamma; \neg\alpha \vdash \neg\beta$，则 $\Gamma \vdash \alpha$

可以证明

$(\neg+)$ 若 $\Gamma; \alpha \vdash \beta$ 且 $\Gamma; \alpha \vdash \neg\beta$，则 $\Gamma \vdash \neg\alpha$

$(\neg)$ 若 $\Gamma \vdash \alpha$ 且 $\Gamma \vdash \neg\alpha$，则 $\Gamma \vdash \beta$

直觉主义的命题演算形式系统

在系统N上用$(\neg +)$和$(\neg)$代替$(\neg +)$作为推演规则。

推演规则:

$(\neg +)$ 若 $\Gamma; \alpha \vdash \beta$ 且 $\Gamma; \alpha \vdash \neg\beta$，则 $\Gamma \vdash \neg\alpha$
$(\neg)$ 若 $\Gamma \vdash \alpha$ 且 $\Gamma \vdash \neg\alpha$，则 $\Gamma \vdash \beta$

而从以上两条公理无法证明$(\neg -)$。

直觉主义的命题演算形式系统

如果证明必须要用反证法，那么在 IND 中就是不可证的。

例如：

$$
\begin{array}{lll}
 & \neg\neg\alpha \vdash \alpha & \\
(1) & \neg\neg\alpha, \neg\alpha \vdash \neg\alpha & (\in) \\
(2) & \neg\neg\alpha, \neg\alpha \vdash \neg\neg\alpha & (\in) \\
(3) & \neg\neg\alpha \vdash \alpha & (\neg -)(1)(2)
\end{array}
$$

IND 中不能使用双重否定消去。

直觉主义的命题演算形式系统

如果证明必须要用反证法，那么在 IND 中就是不可证的。

例如：

$$\alpha \vdash \neg\neg\alpha$$

$$\begin{array}{lll} (1) & \alpha, \neg\alpha \vdash \alpha & (\in) \\ (2) & \alpha, \neg\alpha \vdash \neg\alpha & (\in) \\ (3) & \alpha \vdash \neg\neg\alpha & (\neg+)(1)(2) \end{array}$$

IND 中可以使用双重否定增加。

直觉主义的直观理解

命题分为三种:

- 真命题P（P）
- 假命题P（$\neg P$）
- 不假命题P（$\neg\neg P$）

P 真蕴含 P 不假: $\vdash P \to \neg\neg P$

P 不假不代表 P 真: $\nvdash \neg\neg P \to P$

直觉主义的直观理解

$\nvdash_{\text{IND}} P \lor \neg P$：不承认排中律

$\vdash_{\text{IND}} \neg(P \land \neg P)$：承认矛盾律

$\vdash_{\text{IND}} \neg\neg(P \lor \neg P)$：不否认排中律

并不是那么直观的定理：

$\nvdash_{\text{IND}} \neg\neg P \to P$

$\vdash_{\text{IND}} \neg\neg\neg P \to \neg P$

不要以这种思维方式写Coq程序，只是帮助理解。

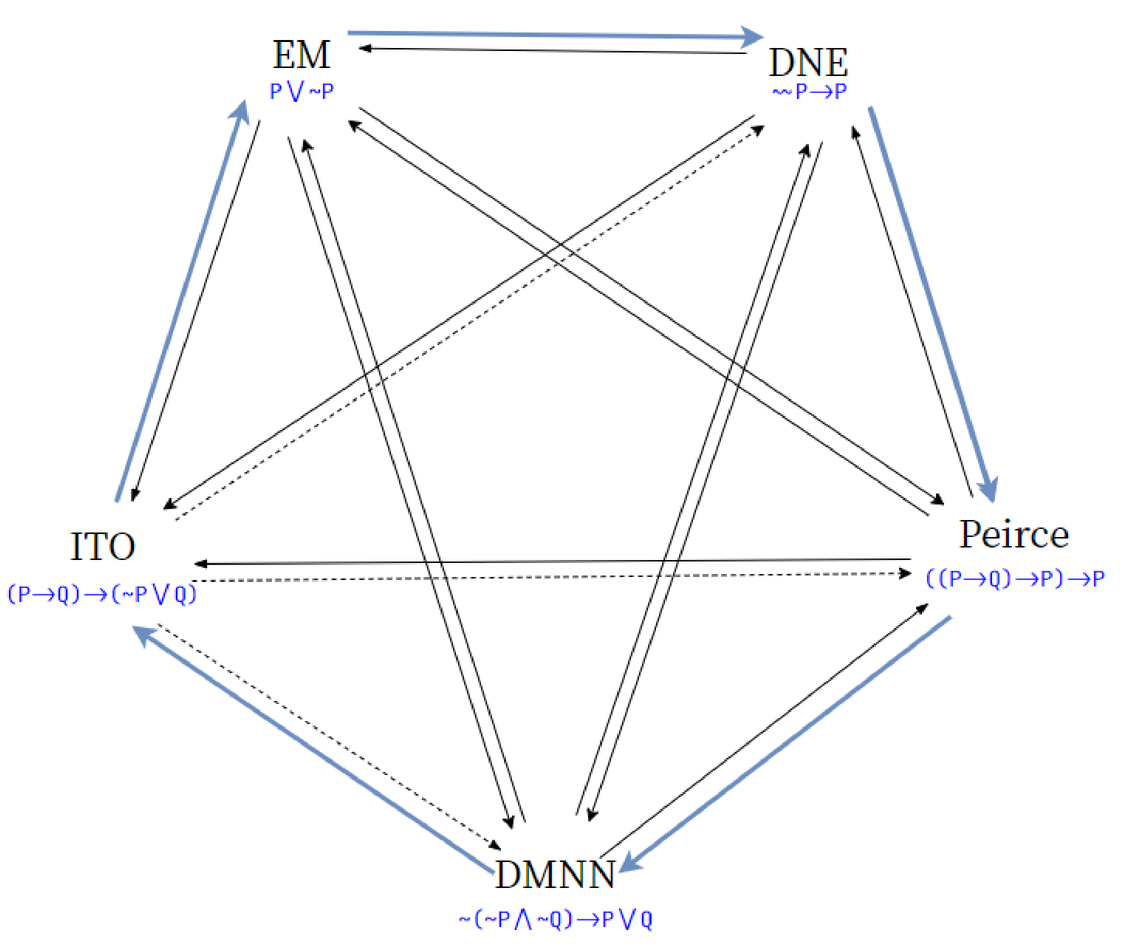
习题

Exercise: 3 stars, standard (`excluded_middle_irrefutable`)

```
Theorem excluded_middle_irrefutable: forall (P:Prop),
  ~ ~ (P \/ ~ P).
Proof.
  unfold not. intros P H.
  apply H. right. intros HP.
  apply H. left. apply HP.
Qed.
```

习题

Exercise: 5 stars, standard, optional (`classical_axioms`)



谢谢大家